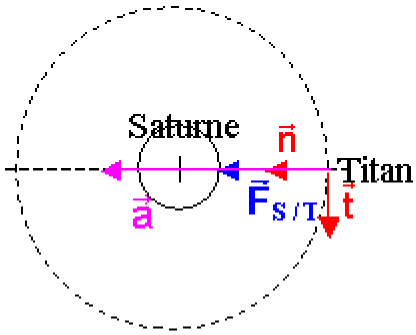
Solution :

1) On utilise le référentiel saturno-centrique galiléen, solide formé par le centre de Saturne et les centres de 3 étoiles lointaines .

2) On néglige la force gravitationnelle exercée par le Soleil.

La force extérieure appliquée au satellite Titan est la force gravitationnelle $F_{S/T}$ exercée par Saturne dirigée de T vers S.

3) Schéma



4) $\vec{F}_{S/T} = (G.M_S.M_T / R_T^2) . \vec{n}$

5) On applique la $2^{ème}$ loi de Newton au satellite Titan dans le référentiel saturno-centrique supposé galiléen. : $\vec{F}_{S/T} = M_T . \vec{a}$

$(G.M_S.M_T / R_T^2) . \vec{n} = M_T . \vec{a}$; $\vec{a} = (G.M_S / R_T^2) . \vec{n}$

6) $\vec{a} = a_t . \vec{t} + a_n . \vec{n}$; $a_t = dv/dt$ et $a_n = v^2 / R_T$

7) $\vec{a} = (G.M_S / R_T^2) . \vec{n}$, $\vec{a}$ se réduit à la composante a_n .

8) $\vec{a} = dv/dt . \vec{t} + v^2 / R_T . \vec{n} = (G.M_S / R_T^2) . \vec{n}$

On a donc : $dv /dt = 0$ (1) et $v^2 / R_T = G.M_S / R_T^2$ (2)

$dv /dt = 0$, la vitesse est donc constante, le mouvement de Titan est uniforme.

9) (2) $v^2 / R_T = G.M_S / R_T^2$; $v^2 = G.M_S / R_T$; v = racine $(G.M_S / R_T)$

10) Le mouvement du satellite Encelade est circulaire et uniforme.

Le périmètre du cercle est $2 \pi R_E$. $v = 2 \pi R_E / T$; $T = 2 \pi R_E / v$

11) $T = 2 \pi R_E / v = 2 \pi R_E$. racine $(R_E / G.M_S)$; $T^2 = 4 \pi^2 R^3 / (G.M_S)$; $T^2 / R_E^3 = 4 \pi^2 / (G.M_S)$

12) $R_E^3 = T_E^2 . G . M_S / 4 \pi^2$; $R_E = {}^3$ racine $(T_E^2 . G . M_S / 4 \pi^2)$

$R_E = {}^3$ racine $((1,37 \times 24,0 \times 3600)^2 \times 6,67.10^{-11} \times 5,69.10^{26} / (4 \times 3,14^2)) = 2,38.10^8$ m =

$2,38.10^5$ km

13) Il faut que les périodes T_S et T_C soient égales pour que la sonde soit "saturno-stationnaire"

14) 3ème Loi de Kepler : $T_C{}^2 / (R_S + h)^3 = 4\,\pi^2 / (G.M_S)$

$(R_S + h)^3 = T_C{}^2 \,.\, G \,.\, M_S / 4\,\pi^2$; $R_S + h = {}^3$ racine $(T_C{}^2 \,.\, G \,.\, M_S / 4\,\pi^2)$

$h = {}^3$ racine $(T_C{}^2.G.M_S / (4\,\pi^2) - R_S = {}^3$ racine $(T_S{}^2.G.M_S / (4\,\pi^2) - R_S$

15) $h = {}^3$ racine $((10 \times 3600 + 39 \times 60)^2 \times 6{,}67.10^{-11} \times 5{,}69.10^{26} / (4 \times 3{,}14^2)) - 6{,}0.10^7 = 5{,}2.10^7$ m

$h \approx 52\,000$ km (Ce résultat est du même ordre de grandeur que l'altitude d'un satellite géostationnaire de 36 000 km)