I - OBJET DU PROBLEME

Calcul de probabilites et suite geometrique.

II - DEVELOPPEMENT

1. Soit B l'evenement " tirer une boule blanche " et N l'evenement " tirer une boule noire "

a)

$$\begin{aligned} P(N\cap N\cap N\cap B) &= P(N)*P(N)*P(N)*P(B) \\ &= \frac{4}{6}*\frac{3}{5}*\frac{2}{4}*\frac{2}{3} \\ &= \frac{48}{360} \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

b) On peut avoir une blanche au 1^{er} tirage ou une blanche au $2^{ème}$ tirage, etc.

$$\begin{aligned} P\{N,N,N,B\} &= P(N\cap N\cap N\cap B)+P(N\cap N\cap B\cap N)+P(N\cap B\cap N\cap N)+P(B\cap N\cap N\cap N) \\ &= \frac{2}{15}+\frac{2}{15}+\frac{2}{15}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15} \end{aligned}$$

2.

a)

$$\begin{aligned} P(N\cap N\cap N\cap B) &= P(N)*P(N)*P(N)*P(B) \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^3*\left(\frac{2}{6}\right)=\frac{128}{1296}=\frac{8}{81} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P\{N,N,N,B\} &= C_4^3*\left(\frac{4}{6}\right)^3*\left(\frac{2}{6}\right) \\ &= 4*\left(\frac{4}{6}\right)^3*\left(\frac{2}{6}\right)=\frac{512}{1296}=\frac{32}{81} \end{aligned}$$

3.

a)

$$P_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P_2=\frac{4}{6}*\frac{2}{6}=\frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{4}{6}*\frac{4}{6}*\frac{2}{6} \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^2*\frac{2}{6}=\left(\frac{2}{3}\right)^2*\frac{1}{3}=\frac{4}{27} \end{aligned}$$

$$P_n=\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}*\frac{2}{6}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}*\frac{1}{3}$$

b)

$S_n = P_1 + P_2 + ... + P_n$ $n > 1$

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \dots\dots \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

S_n est la somme des n premiers termes d'une suite geometrique de premier terme $P_1 = 1 / 3$ et de raison $2 / 3$. D'où :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3}*\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} \\ &= 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 \text{ car } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \left(0<\frac{2}{3}<1\right)$$

III - COMMENTAIRE MATHEMATIQUE

Il fallait remarquer que les 2 questions posees portaient sur des evenements independants avec un schema de Bernouilli pour la seconde.