

Les traces de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2cm).

On rappelle qu'une fonction  $f$  est majorée par une fonction  $g$  (ce qui signifie aussi que  $g$  est minorée par  $f$ ) sur un intervalle  $I$  si et seulement si, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f(x) \leq g(x)$ .

### Partie A

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(1+x)$  et  $g(x) = \frac{2x}{x+2}$ ; on notera  $C$  la représentation graphique de  $f$  et  $\Gamma$  celle de  $g$ .

On se propose de démontrer que  $f$  est minorée par  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

1. Étudier le sens de variation de  $h$  sur  $[0 ; +\infty[$ ; calculer  $h(0)$ . (L'étude de la limite de  $h$  en  $+\infty$  n'est pas demandée).

2. En déduire que pour tout réel  $x$  positif ou nul, (1)  $\frac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x)$ .

3. Construire dans le même repère les courbes  $C$  et  $\Gamma$  et montrer qu'elles admettent en  $O$  une même tangente  $D$  que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes).

### Partie B

$k$  désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires  $x \rightarrow kx$ , majorant la fonction :

$f: x \rightarrow \ln(1+x)$  sur  $[0, +\infty[$ .

Soit  $f_k$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$ .

1. Étudier le sens de variation de  $f_1$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f_1(x) = \ln(1+x) - x.$$

2. Étudier la limite de  $f_1$  en  $+\infty$  et donner la valeur de  $f_1$  en  $O$ .

3. Montrer que pour tout réel  $x$  positif ou nul :

$$(2) \ln(1+x) \leq x.$$

4. En déduire que si  $k \geq 1$ , alors : pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) \leq kx$ .

5. Le réel  $k$  vérifie les conditions :  $0 < k < 1$ .

Montrer que la dérivée de  $f_k$  s'annule pour  $x = \frac{1-k}{k}$  et étudier le sens de variation de  $f_k$ . (L'étude de la limite de  $f_k$  en  $+\infty$  n'est pas demandée).

6. En déduire les valeurs de  $k$  strictement positives telles que pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) \leq kx$ .

### Partie C

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I = \int_0^1 \ln(1+x) \, dx.$$

(On remarquera éventuellement que :  $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ ).

En déduire le calcul de  $J = \int_0^1 (x - \ln(1+x)) \, dx$  puis de  $K = \int_0^1 \left( \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2} \right) dx$ .

(Pour le calcul de  $K$  on pourra vérifier que :  $\frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{2+x}$ ).

Interpréter géométriquement les valeurs des intégrales  $J$  et  $K$  en utilisant les courbes  $C$ ,  $\Gamma$  et la droite  $D$  obtenues dans la partie A.

2. Soit  $u$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  de la façon suivante :

$$u(0) = 1 \text{ et si } x \neq 0, u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

a. Démontrer que la fonction  $u$  est continue sur  $[0 ; 1]$ .

b. On pose

$$L = \int_0^1 u(x) \, dx.$$

En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties A et B, montrer que :

$$L = \int_0^1 \frac{2}{x+2} \, dx \leq L \leq 1.$$

En déduire une valeur approchée de  $L$  à  $10^{-1}$  près.