Préparation bac S:

Nombres complexes

Exercice N°1: 5 pts

Partie A

On considère l'equation (E): $Z^3 - (4+i)Z^2 + (13+4i)Z - 13i = 0$ et Z est un nombre complexe.

1-/ Démontrer que i est solution de cette équation.

2-/ Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe Z on ait:

$$Z^3 - (4+i)Z^2 + (13+4i)Z - 13i = (z-i)(aZ^2 + bZ + c)$$

3-/ En déduire les solutions de l'équation (E)

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$), on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, 2+3i, 2-3i.

1-/ Soit r la rotation de centre B et d'angle π /4. Déterminer l'affixe du point Á, image du point A par la rotation r.

2-/ Démontrer que les points Á, B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en Á.

Exercice N°2: 5 pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra pour unité graphique 5cm. On pose $Z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n:

$$Z_{n+1} = \frac{(1+i)}{2} Z_n$$, on note A_n le point du plan d'affixe Z_n

1-/ Calculer Z_1, Z_2, Z_3 et verifier que Z_4 est un nombre réel. Placer les points A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 sur une figure.

2-/ Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = |Z_n|$, justifier que la suite (Un) est géometrique, puis établir que pour tout entier naturel n:

$$U_n = 2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

3-/ A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent -ils au disque de centre O et de rayon 0,1?

4-a-/ Etablir que, pour tout entier naturel n:

$$\frac{(Z^{n+1}-Z_n)}{Z_{n+1}}=i$$, en déduire la nature du triangle $OA_n A_{n+1}$

b-/ Pour tout entier natureln, on note l_n la longueur de la ligne brisée tel que:

$$A_0 A_1 A_2 .... A_{n-1} A_n = l_n$$

Exprimer l_n en fonction de n , quelle est la limite de la suite (l_n) ?

Exercice N°3: 5pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra pour unité graphique 2cm.

1-/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $Z^2 - 2\sqrt{3}\ Z + 4 = 0$

On pose $a=\sqrt{3}+i$ *et* $b=\sqrt{3}-i$

Ecrire a et b sous forme exponentielle , puis placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2-a-/ Soit r le rotation de centre O et d'angle π/3 , calculer l'affixe á du point Á image de A par le rotation r.

E crire á sous forme algébrique et placer le point Á sur la figure précedende.

2-b-/ Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{-3}{2}$,

Calculer l'affixe b' du point B' image de B par h. Placer B' sur la figure précedente.

3-/ Soit C le centre du cercle, circonscrit au triangle OA'B' et R le rayon de ce cercle, on désigne par c l'affixe du point C.

a-/ Justifier les égalités suivantes:

$$c\bar{c}=R^2 \quad ; \qquad (c-2\mathrm{i})(\bar{c}+2\mathrm{i})=R^2$$

$$(c+3\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\mathrm{i}}{2})(\bar{c}+3\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\mathrm{i}}{2})=R^2$$

b-/ Déduire que $c-\bar{c}=2\mathrm{i}$ *et puis* $c+\bar{c}=-4\frac{\sqrt{3}}{3}$

c-/ En déduire l'affixe c du point C et la valeur de R.

Exercice N°4: 4 pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra pour unité graphique 2cm.

On désigne par A le point d'affixe $Z_A = 1$, et par (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

Partie A

Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $Z_B = 1 + \exp(i\pi/3)$ et E le point d'affixe $(1 + Z_B^2)$

1. a. Montrer que le point B appartient au cercle (C).

b. Déterminer une mesure en radians de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AF} \ ; \ \overrightarrow{AB})$

Placer le point B.

2. a. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(Z_B - Z_A)$ *et puis* $(Z_E - Z_A)$

b. En déduire que les points A , B et E sont alignés.

3. Placer le point E.

Partie B

Pour tout nombre complexe Z tel que Z = 1, on considère les points M et M' d'affixes respectives Z et Z' où $Z' = 1 + Z^2$.

1-/ Pour $Z \neq 0$ *et* $Z \neq 1$, donner, à l'aide des points A, M et M', une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe

$$\frac{(Z' - 1)}{(Z - 1)}$$

2. En déduire que A, M et M sont alignés si et seulement si

$$\frac{Z^2}{(Z - 1)}$$ est un réel.

Exercice N°5: 5pts

Dans l'ensemble C des nombres complexes, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$

1-/ Montrer que $(1+i)^6 = -8i$.

2-/ On considère l'équation (E) : $Z^2 = -8i$.

2-a-/.Déduire de **1.** une solution de l'équation (E).

2-b-/ L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3-/ Déduire également de **1.** une solution de l'équation (E') $Z^3 = -8i$.

4-/ On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $2\pi/3$

4-a-/ Déterminer l'affixe b du point B, image deA par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r .

4-b-/ Montrer que b et c sont solutions de (E).

5-a-/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$), (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.

5-b-/ Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions?

5-c-/ Déterminer le centre de gravité de cette figure.

Exercice N°6: 5pts

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - \mathrm{i}$ et $c = 1 + \mathrm{i}$.

1.

(a) Placer les points A, B et C sur une figure.

(b) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2.

(a) On appelle r la rotation de centre A telle que r (B) = C.

Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point D = r (C).

(b) Soit Γ le cercle de diamètre [BC].

Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r .

3. Soit M un point de Γ d'affixe z , distinct de C et M' d'affixe z' son image par r .

(a) Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\,;2\pi\right[$ tel que $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(b) Exprimer z' en fonction de θ .

(c) Montrer que $\frac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

(d) Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M $'$ par r